

## 1. ANNEXOS

### ANNEX I:

Exercici 1º:

És el nostre aniversari, i una cadena d'hamburgueseries molt coneguda ens emet un val per valor de 10€ que hem de consumir el mateix dia. Així doncs, podem triar entre hamburgueses de formatge a 3€ cada una o racions de patates fregides a 2€ cada una.

Si tenim en compte que hem de consumir obligatòriament els 10€:

- Quina combinació triaríem d'hamburgueses i patates fregides?
- Fes la resolució gràfica a la pissarra digital.

Variant:

Suposem que ha coincidit el dia del meu aniversari amb una rebaixa del preu de l'hamburguesa de formatge en un 50%. Aleshores el preu de l'hamburguesa amb formatge seria de 2€, mentre que les patates fregides segueixen tenint un preu de 2€.

- Quina combinació triaríem?
- Per què?
- Plantegem el sistema d'inequacions
- Plantegem la resolució gràfica.

Suposem que la satisfacció personal de menjar-me una ració de patates fregides és sempre el doble que la de menjar-me una hamburguesa de formatge:

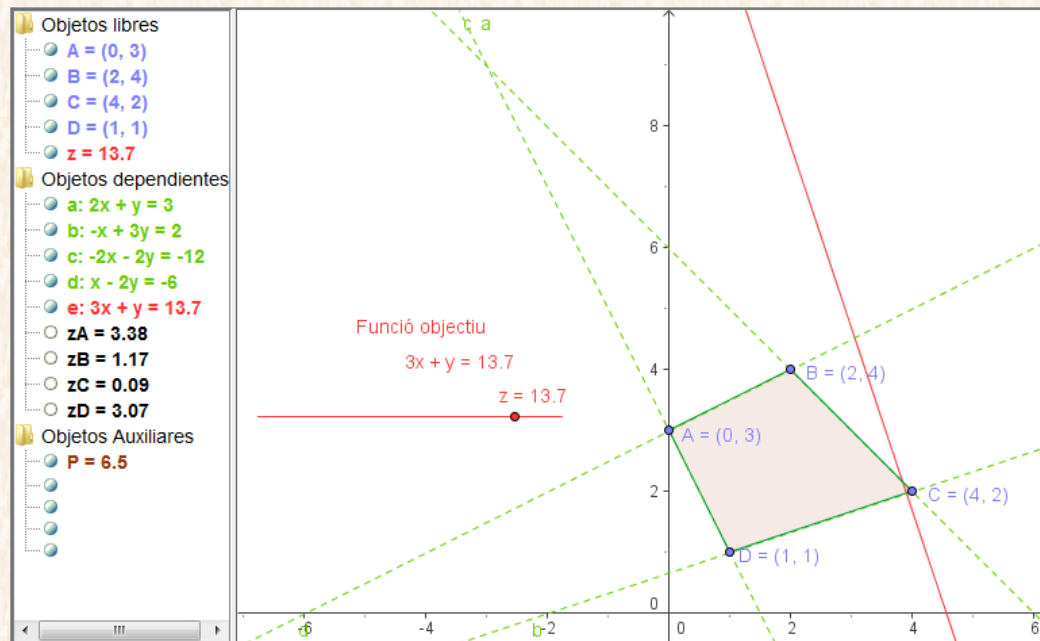
- Quina combinació triaríem ara?
- Per què?
- Plantegem la resolució gràfica.

## ANNEX II:

Direcció web de l'aplicació interactiva:

<http://www.xtec.es/~jbujosa/GeoGebra/programaciolineal/ProgramLin.htm>

Aquesta és la representació gràfica d'un problema de programació lineal, amb quatre restriccions (equacions de les rectes en verd a la finestra algebraica). Si moveu el punt lliscant  $z$ , arrossegant-lo o prement les tecles de les fletxes de moviment de cursor, podreu observar els diferents valors que agafa la funció objectiu.



Modifiqueu la funció objectiu, fent doble clic sobre la seva expressió que surt en vermell a la finestra algebraica, per provar diferents casos (amb el coeficient de la  $y$  negatiu, amb paral·lelisme amb alguna restricció, ...).

També podeu modificar la regió factible, arrossegant directament els vèrtexs.

### ANNEX III:

#### Recinte limitat:

Si la regió del pla ve definida per les inequacions:

$$x+y-1 \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq y \leq 2$$

Per a quins valors  $(x,y)$  de la regió és màxima la funció  $z=5x+2y$ ?

Per a quins valors  $(x,y)$  és mínima?

#### Recinte il·limitat:

En la regió determinada per  $x+y \geq 2$ ,  $x \leq y$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , troba els punts en què la funció  $f(x,y)=3x+4y$  aconsegueix el seu mínim i el seu màxim

#### Solució única:

Troba els valors de  $x$  i  $y$  que fan màxima la funció  $z=8x+5y$ , subjecta a les restriccions adjuntes:

$x$  i  $y$  han d'ésser nombres naturals.

$$x+y \leq 7$$

$$3x+y \leq 12$$

$$x \leq 3$$

#### Solució múltiple:

Un comerciant desitja comprar dos tipus de frigorífics,  $F_1$ ,  $F_2$ . Els del tipus  $F_1$  costen 300€ i els del tipus  $F_2$ , 500€.

Només disposa de lloc per a 20 frigorífics i de 7.000€ per comprar-los.

Quants frigorífics ha de comprar de cada tipus per obtenir uns beneficis màxims amb la seva venda posterior si sap que amb cada frigorífic guanya el 30% del preu de compra?

## ANNEX IV

Direcció web de l'aplicació interactiva:

<http://www.xtec.es/~jbujosa/GeoGebra/programaciolineal/ProgramLin.htm>

Requereix la instal·lació del programa Derive i de Java.

### 1. PROGRAMACIÓN LINEAL

En las actividades económicas normalmente se analizan variables ligadas mediante inecuaciones y cuyo objetivo es encontrar soluciones para las variables que hagan máximo el beneficio o mínimo el coste.

La **programación lineal** trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada **función objetivo**, sujeta a una serie de **restricciones** expresadas mediante inecuaciones lineales.

Nosotros sólo trataremos la programación lineal de dos variables. En ella la función objetivo será de la forma:

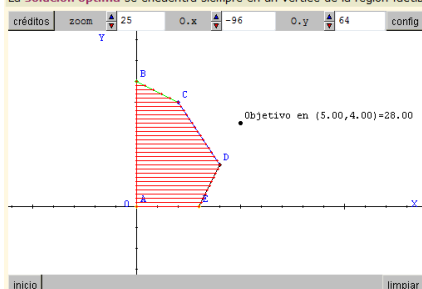
$$f(x,y) = ax + by$$

y las restricciones adoptarán la forma:

$$a_1x + b_1y \leq c_1 \quad \text{ó} \quad a_1x + b_1y \geq c_1$$

El conjunto de soluciones factibles para este problema es un polígono, cuyos lados son las rectas asociadas a cada restricción; este polígono puede ser acotado o no acotado. Todo punto del polígono cumple las restricciones y por tanto puede ser solución.

La **solución óptima** se encuentra siempre en un vértice de la región factible.



Veamos un ejemplo:

La función objetivo es:

$$f(x,y) = 4x + 2y$$

Las restricciones son:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + 2y \leq 12$$

$$3x + 2y \leq 16$$

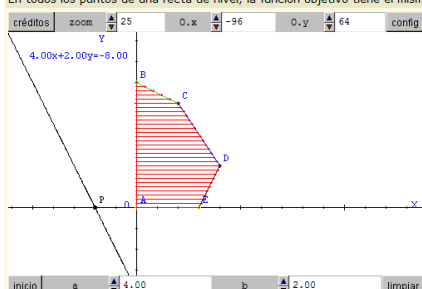
$$2x - y \leq 6$$

Busca el valor máximo de la función objetivo en este recinto.

Mueve el punto negro con el ratón.

Las **rectas de nivel** asociadas a la función objetivo  $f(x,y)=ax+by$  son las rectas  $ax+by=k$ .

En todos los puntos de una recta de nivel, la función objetivo tiene el mismo valor  $k$ . La solución óptima se consigue encontrando la recta de mayor o menor nivel que tiene puntos de la región factible.



En esta escena vemos las rectas de nivel usando los datos anteriores

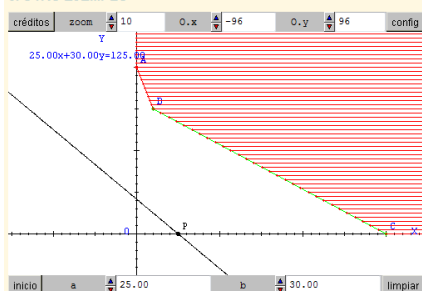
Ejercicio:

1.-¿Qué valor del recinto hace máxima la función objetivo?

2.-¿Qué valores de  $a$  y  $b$  hacen que el problema tenga infinitas soluciones? ¿Cómo debe ser la recta para que esto ocurra?

Mueve el punto negro P con el ratón.

### 3. OTRO EJEMPLO



Si las restricciones fueran:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$15x + 20y \geq 450$$

$$25x + 10y \geq 200$$

Y la función objetivo hubiera que minimizarla y fuera  $f(x,y)=25x+30y$

Ejercicio:

3.-¿Qué punto hace mínima la función objetivo? ¿Y máxima?

4.-¿Qué valores de  $a$  y  $b$  hacen que el problema tenga infinitas soluciones?

## ANNEX V:

A començament de curs, una llibreria llença unes ofertes de material escolar. Disposa de 600 llibretes, 500 carpetes i 400 bolígrafs en oferta. Els empaqueten de forma:

Paquet 1 = 2 llibretes, 1 carpeta i 2 bolígrafs.

Paquet 2 = 3 llibretes, 1 carpeta i 1 bolígraf.

Els preus de cada paquet seran 6,5€ i 7€ respectivament. Suposant que ho ven tot, quants paquets de cada li convenen per poder maximitzar el seu benefici?

Funció objectiu:  $f(x, y) = 6.5x + 7y$

Taula de restriccions:

	P1	P2	Disponibles
Llibretes	2	3	600
Carpetes	1	1	500
bolígrafs	2	1	400

## **ANNEX VI:**

### **Exercici 1:**

Una companyia fabrica i ven dos models de làmpada. Per a la seva fabricació necessita un treball manual de 20 minuts pel primer model i de 30 minuts pel segon model. La màquina ha de treballar 20 minuts pel primer model de làmpada i 10 minuts per al segon model.

Al mes, es disposa d'un treball manual de 100 hores i de 80 hores de treball de màquines. La primera i la segona làmpada sabem que el benefici és de 15€ i 10€ respectivament. Planifica la producció per obtenir el màxim benefici.

### **Exercici 2:**

En una granja de pollastres es dona una dieta d'engreix amb una composició mínima de 15 mesures de gra i altres 15 mesures de mill. En el mercat es venen aquests cereals en la següents paquets:

El Paquet 1 té un cost de 10€ i inclou 1 mesura de gra i 5 de mill.  
El paquet 2 té un cost de 30€ i inclou 5 mesures de gra i 1 de mill.

Quines quantitats s'han de comprar de cada tipus per cobrir les necessitats a un cost mínim?

### **Exercici 3:**

Disposem de 600 grams d'un fàrmac per fer càpsules tant grosses com petites. Les grans pesen 40g i les petites 30g. Necessitem fer un mínim de 3 càpsules grans, i almenys el doble de petites que de grans.

Cada càpsula gran ens aporta un benefici de 2€ i la petita d'1€. Quantes pastilles s'han de produir cada dia per maximitzar el benefici?

### **Exercici 4:**

Uns grans magatzem volen liquidar 200 camises i 100 pantalons de la temporada anterior. Llencen dos lots d'oferta. En el primer lot de camisa i pantalons s'ofereix a 30€. El segon lot és de tres camises i uns pantalons, s'ofereix a 50€.

L'encarregat necessita vendre mínim 20 lots número un i 10 lots del número dos. Quants lots de cada tipus ha de vendre per maximitzar els guanys?

Un taller pirotècnic fabrica coets senzills que després ven a 2,70 € el paquet de 10. També fabrica coets de colors que ven a 3,60 € el paquet de 10. Per problemes de mecanització, no pot fabricar per dia més de 400 coets senzills ni més de 300 coets de colors, ni tampoc més de 500 coets sumant els de les dues classes. Suposem que es ven tota la producció. Quants coets de cada classe convé fabricar i vendre per obtenir el màxim benefici? Quin serà aquest benefici?

## ANNEX VII:

1)

En una fàbrica de torró, utilitzen dues classes d'ametlla per fer els seus productes. Aquesta temporada, han comprat 10.000 kg d'ametlla llargueta i 9.000 kg d'ametlla marcona, a més de 7.000 kg de mel. L'empresa acostuma a elaborar torró de Xixona en dues qualitats. La composició del torró de qualitat normal és d'un 25 % d'ametlla marcona, un 45 % d'ametlla llargueta i un 30 % de mel. Pel que fa al torró de qualitat suprema, conté un 50 % d'ametlla marcona, un 25 % de llargueta i un 25 % de mel.

L'empresa empaqueta el torró normal en pastilles de 250 g i les ven a 3 euros, mentre que el de qualitat suprema va en pastilles de 300 g i les ven a 4,5 euros. Calcula la quantitat de pastilles d'una classe i de l'altra que els convé produir per obtenir el màxim benefici.

2)

Un enginyer agrícola fa un estudi del terra d'una parcel·la on es cultiva raïm de taula. Segons l'estudi, la parcel·la s'ha d'adobar amb un mínim de 30 kg de nitrogen, i no se li poden posar més de 80 kg de potassi, ni més de 36 kg de sofre. L'enginyer troba en el mercat dos productes que inclouen aquestes substàncies:

- El producte A conté un 13 % de nitrogen i un 46 % de potassi.
- El producte B conté un 15 % de nitrogen, un 30 % de potassi i un 15 % de sofre.

Li diuen que el producte A té un preu de 0,51 euros per quilo, i que el producte B costa 0,74 euros el quilo. Quina quantitat ha de comprar de cada producte per reduir com més millor la despesa de diners? (En el magatzem venen els productes per quilos, i no serveixen fraccions d'aquesta mesura.)

3)

L'empresa minera Riu Brut, SA explota dues mines, de les quals extreu, després d'un procés de refinament dels minerals, coure, mercuri i sofre. La roca extreta de la mina La Candelera té una riquesa del 10 % de coure, el 5 % de mercuri i el 23 % de sofre. En canvi, la roca de la mina El Pou té una composició d'un 3 % de coure, un 20 % de mercuri i un 11 % de sofre.

Per compromisos amb els seus clients, l'empresa ha de produir un mínim de 2 tones de coure, 1,6 de mercuri i 5 de sofre. Per altra banda, no pot emmagatzemar més de 4 tones de coure, ni 3 de mercuri, ni 9,3 de sofre.

Si el cost d'extracció per tona de roca és de 42 euros per a la mina de La Candelera, i de 34 euros per a la d'El Pou, estudia la quantitat de roca d'una mina i de l'altra que els interessa extreure per fer mínims els costos.

4)

Un constructor disposa de 7.158 m<sup>2</sup> per construir una urbanització d'habitatges unifamiliars. L'ajuntament al terme del qual pertanyen els terrenys es queda per llei amb la tercera part del sol disponible per a usos en benefici de la comunitat, mentre que una altra tercera part és per a carrers. D'altra banda, l'ajuntament no li donarà permís d'obra si no edifica un mínim de 7 habitatges de protecció oficial (de 90 m<sup>2</sup>). Així mateix, el constructor ja s'ha compromès amb uns clients a fer-los 5 xalets de renda lliure (de 120 m<sup>2</sup>).

La urbanització ha d'estar acabada en 2 anys i 6 mesos, i els paletes necessiten 3 mesos per construir un habitatge de protecció oficial i 4 mesos per a un de renda lliure. Si els habitatges de protecció oficial es venen a 90.000 euros, i els de renda lliure a 144.000 euros, quina quantitat de cada tipus ha d'edificar el constructor per tenir uns ingressos màxims?

Solució

5)

Un parc natural es vol repoblar amb conills i llops. Per qüestions de manteniment de l'ecosistema, el nombre d'animals introduït no pot excedir de 525, i per cada llop s'han de ficar almenys 23 conills. D'altra banda, el nombre de llops no pot superar la quinzena, pel risc que suposen per a les altres espècies.

- Amb quants llops i conills interessa fer la repoblació perquè el nombre d'animals introduïts sigui màxim?
- I si a més ens interessa que la diversitat d'espècies també sigui màxima?



## ANNEX VIII

### Exercici financer:

Una persona té 5.000 € per invertir en dos tipus d'accions, *A* i *B*. Les accions del tipus *A* tenen força risc, amb un interès anual del 10 %. Les accions del tipus *B* són bastant segures, amb un interès anual del 7 %. Si decideix invertir com a màxim 3.000 € en *A* i com a mínim 1.000 € en *B*, i invertir en *A* com a mínim tant com en *B*, com ha d'invertir els 5.000 € per maximitzar els seus interessos anuals? Quin interès obtindrà?

### Exercici de producció:

En una granja es preparen dos classes de pinso, *A* i *B*, barrejant dos productes, *P* i *Q*. Un sac de *A* conté 8 kg de *P* i 2 kg de *Q*. Un sac de *B* conté 10 kg de *P* i 5 kg de *Q*. Cada sac de *A* es ven a 30 € i cada sac de *B*, a 80 €. Si la granja té emmagatzemats 80 kg de *P* i 25 kg de *Q*, quants sacs de cada tipus s'han de preparar per obtenir els màxims ingressos possibles? Quins són aquests ingressos?

### Exercici de transports:

Una empresa dedicada a la fabricació de component d'ordinador té dues fàbriques que produeixen, respectivament, 800 i 1500 peces mensuals. Aquestes peces han de ser transportades a tres tendes que necessiten 1000, 700 i 600 peces, respectivament. Els costos de transport en euros per peça són els que apareixen a la taula adjunta. Com s'ha d'organitzar el transport per tal de que el cost sigui mínim?

	Tenda A	Tenda B	Tenda C
Fàbrica I	3	7	1
Fàbrica II	2	2	6